Randvärdesproblem,
Finita differensmetoden
och Finita elementmetoden
Föreläsningsanteckningar
MA8020 HT2018

Pererik Andreasson
Epost perand@hh.se

10 december 2018

1 Inledning

Detta dokument beskriver (på ett något ostrukturerat sätt) vad som kan komma att krävas på en skriftlig examination i kursen MA8020 höstterminen 2018. Jag vågar hävda att den inte innehåller några direkta felaktigheter, men den är väldigt långt ifrån matematisk stringens och ibland tas det genvägar för att underlätta *förståelse*. Direkt (välgrundad) kritik tas gärna emot.

2 Randvärdesproblem

Randvärdesproblem är differentialekvationer där den sökta funktionen, eller dess derivata, är given i ändarna av intervallet (i 1D). Typiskt exempel är en stav vars ändar hålls vid två olika temperaturer. Lösningen till detta kommer både att tillfredsställa värmeledningsekvationen *och* randvillkoren med olika temperatur på stavens olika ändar. Ett annat exempel är en sträng som kan svänga fritt förutom i dess ändar som är fastspända. Här kommer funktionen som beskriver strängens avvikelse från jämviktsläget tillfredsställa vågekvationen och randvillkoren med de fasta ändarna. *Följande avsnitt är helt eller delvis inspirerat av Heath: Scientific Computing An Introductory Survey[1], där inte andra källor anges.*

3 Finita differensmetoden

Finita differensmetoden används till att reducera randvärdesproblem till ett algebraiskt problem. I denna metod ersätts derivator med *finita differenser*. (Jag håller med, den förklaringen hjälpte inte…) Enklaste exemplet är att vi ersätter en förstaderivata först, sen gräver vi ner oss något. Du *måste* komma ihåg derivatans definition, här enligt den ökända felkällan WIKIPEDIA[1]:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

För att vara sträng och matematisk bör dessa härledas från Taylor-utvecklingar, men för att förstå poängen anser jag att det räcker med derivatans definition. Kom ihåg från Bertils/Mikaels föreläsning att det finns tre olika sätt för förstaderivatan, framåt-, bakåt- och centraldifferensmetod. För att åstadkomma en andraderivata används framåt- och bakåtdifferens *tillsammans* för att få en rimlig andraderivata. Jag kallar framåtdifferensderivatan för $D_+(x)$ och bakåtdifferensderivatan för $D_-(x)$ så ges andraderivatan på ett snyggt sätt av:

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{D_+(x) - D_-(x)}{h} && (2) \\ &= \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} && (3) \\ &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. && (4) \end{aligned}$$

Här är egentligen hela iden till finita differensmetoden framställd i all sin effektiva enkelhet, det handlar alltså om att stega en viss bit i funktionen (h) och genom att "gissa" lösningsvärden iterativt lösa problemet. När du tittar på ekv. 4 skall du alltså tänka x_i, x_{i+1} och x_{i-1}. För att exemplifiera löser vi följande problem:

$$y'' = 6t, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{5}$$

med randvärdesvillkoren:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{6}$$

Vi nöjer oss nu i demo-syfte att beräkna funktionsvärdet i en endaste punkt i intervallet, $t = 0.5$. Om vi kallar punkterna y_0 osv då $t = 0$ osv kan vi använda oss direkt av ekv. 4 med $h = 0.5$ och sätta in i ekv. 5:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = 6t_1. \tag{7}$$

[1] I denna frågan litar jag blint på WIKIPEDIA dock.

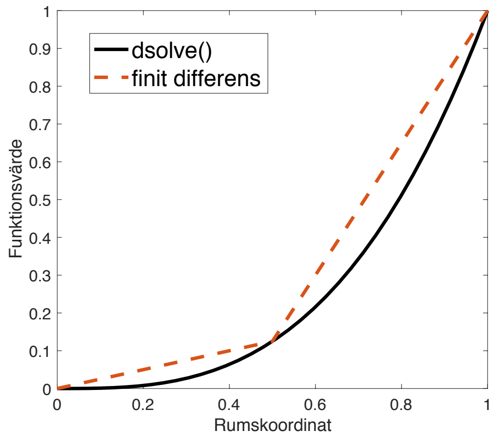
Här vet vi $y_2 = 1$ och $y_0 = 0$ och $t_1 = 0.5$, därför blir ekvationen vi skall lösa:

$$\frac{1 - 2y_1 + 0}{(0.5)^2} = 6(0.5) \tag{8}$$

$$4 - 8y_1 = 3 \tag{9}$$

$$y_1 = \frac{1}{8}. \tag{10}$$

Lösningen är alltså $y(0.5) = \frac{1}{8}$ i den obekanta punkten. Hur nära sanningen är vi med detta då? Den inbyggda lösaren *dsolve()* i MATLAB ger mig lösningen $y(t) = t^3$, plottar jag den jämte vår finita differenslösning ser det ut som i figur 1:



Figur 1: Lösningen till vårt randvärdesproblem, heldragen linje är från *dsolve()* och streckad är från vår finita differensekvationen enligt ekvation 10

3.1 Övning till finita differensmetoden

Lös följande randvärdesproblem med differensmetoden, gör för hand på papper först och implementera sedan i MATLAB eller MATHEMATICA.

1. $y'' = y' + y + 2x$, för $0 \leq x \leq 0.4$ och med $y(0) = 0.4$, $y(0.4) = 1$.
2. $y'' - y = 0$, för $0 \leq t \leq 1$ och med $y(0) = 0$, $y(1) = \sinh(1)$.
3. $y'' - y = x^2 - 2$, för $0 \leq t \leq 1$ $y(0) = 1$, $y(1) = \cosh(1) - 1$.

4 Finita elementmetoden

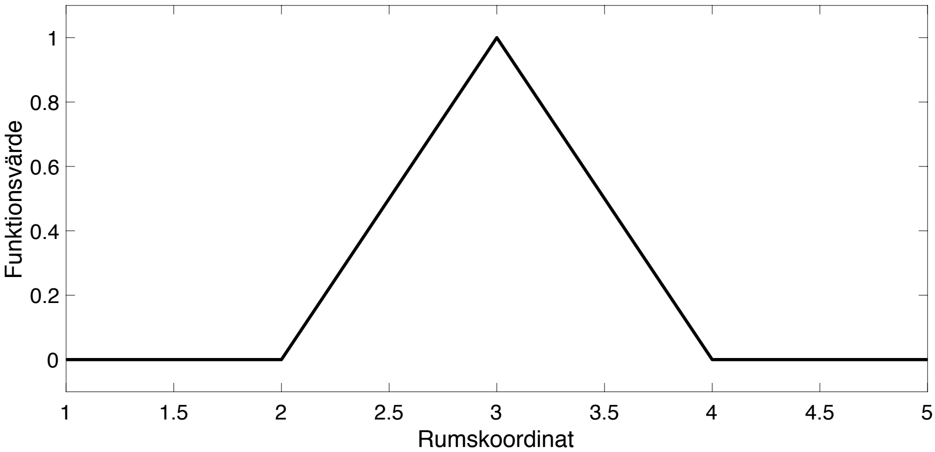
Finita elementmetoden används också till att reducera randvärdesproblem till ett algebraiskt problem. I denna metoden approximeras lösningen till randvärdesproblemet av en lineärkombination av ett begränsat antal basfunktioner, *element*. Dessa basfunktioner, eller element, brukar vara polynom och i Heaths bok kallas dessa ϕ_i. Lösningen, $y(t)$, blir således på formen

$$y(t) \approx u(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i \tag{11}$$

Koefficienterna x_i bestäms genom att man sätter olika villkor på *residualen*, definierad som skillnaden mellan vänster- och högerledet i differentialekvationen. De huvudsakliga metoder som används är:

- Kollokation: Residualen är noll, differentialekvationen är exakt löst i n diskreta punkter.
- Galerkin: Residualen är ortogonal mot rummet som basfunktionerna spänner upp.
- Rayleigh-Ritz: Residualen är minimerad på ett viktat minsta-kvadrat-sätt.

De två senare metoderna är likartade, vi vill alltså hitta en lineärkombination av basfunktionerna som approximerar lösningen till problemet för att residualen blir så liten som möjligt. Alla tre metoder leder till ett system av ekvationer för att hitta koefficienterna x_i. Detta system kan vara lineärt eller icke-lineärt, beroende på om f är lineär eller inte. För att systemet skall vara glest, är det en fördel om basfunktionerna är lokala, dvs noll överallt utom på ett litet ställe. Typiska funktioner i en dimension är B-splines, bitvis lineära "häxhatt"-funktioner, se figur 2.



Figur 2: B-spline B_3^1, häxhattsfunktionen, typisk basfunktion (element) för finita elementmetoden i $1D$.

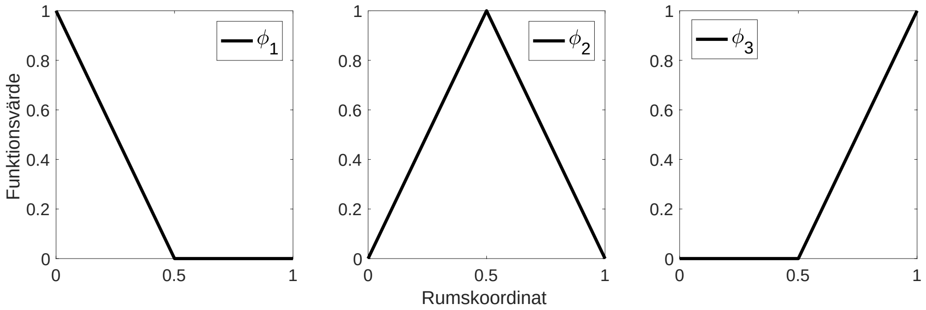
Den glesa matrisen som blir resultatet av detta kallas av traditionella anledningar för "styvhetsmatrisen[2]". Om andra basfunktioner används än dessa enkla "häxhatt"-funktioner, kallas metoden att lösa spektral eller pseudospektral. (Det är alltså *inte* det vi skall göra i denna kursen.)

Galerkinmetoden

I kursen kommer vi inte djupdyka i de olika metoderna och skillnaden mellan dem, det anses tillräckligt att du kan lösa enkla randvärdesproblem med Galerkinmetoden som besrivs i detta avsnitt.

Vi vill här lösa randvärdesproblemet som beskrivs av differentialekvationen i ekv. 5 och använder Galerkinmetoden och bitvis lineära basfunktioner (häxhattar). Vi delar upp intervallet i tre punkter och har en häxhattstopp i varje punkt på intervallet, enligt figur 3.

[2]Vilket kan ha med mekaniktillämpningar att göra...



Figur 3: Häxhattsfunktionerna som vi använder för att lösa randvärdesproblemet i ekvation 5

Vår finita elementlösning till problemet ser alltså ut på följande sätt:

$$y(t) \approx u(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + x_3\phi_3(t). \tag{12}$$

Från randvillkoren kan vi direkt bestämma x_1 och x_3, där vet vi vad lösningen är, $x_1 = 0$ och $x_3 = 1$. För att bestämma x_2 använder vi oss av Galerkins metod. Ovan nämnde jag i förbifarten att Galerkinvillkoret är att residualen är ortogonal mot det rum som basfunktionerna spänner upp. Ett sådant uttalande gör ganska ont i ögonen men här kommer förklaringen på hur det ser ut i praktiken. Ortogonal betyder att de är vinkelräta, vilket för funktioner inte riktigt har någon betydelse (för vektorer är det väldigt logiskt dock). För två ortogonala vektorer är skalärprodukten noll, vi behöver alltså en *annan* definition av skalärprodukten, en som funkar för våra små basfunktioner (häxhattar). Detta kommer bli sköj! Två funktioner, f och g, definieras som ortogonala på ett intervall $a \leq x \leq b$ om

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \tag{13}$$

Residualen, $\mathcal{R}$, som vi skall använda är, från ekv. 5:

$$\mathcal{R} = y''(t) - 6t \approx u''(t) - 6t. \tag{14}$$

Med ortogonalitetsvillkoret från ekv. 13 mellan $\mathcal{R}$ och basfunktionen ϕ_2 får vi integralen:

$$\int_0^1 (u''(t) - 6t)\phi_2(t)dt = \tag{15}$$

$$\int_0^1 u''(t)\phi_2(t)dt - 6\int_0^1 t\phi_2(t)dt = 0. \tag{16}$$

Vi börjar med att lösa första intergralen i högerledet från ekv. 16, den löses lämpligast i två steg, först med partiell integration enligt:

$$\int_0^1 u''(t)\phi_2(t)dt = u'(t)\phi_2(t)|_0^1 - \int_0^1 u'(t)\phi_2'(t)dt. \tag{17}$$

Vi vet att ϕ_2 är noll i $t = 0$ och $t = 1$, därför kan första delen av partialintegreringen sättas lika med noll. I andra delen av partialintegreringen måste vi sätta in vår approximation för $u(t)$, dvs det vi har i ekv. 12, här sätter jag in med summatecken för att komprimera raderna något:

$$\int_0^1 u'(t)\phi_2'(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\phi_i'\right)\phi_2'(t)dt \tag{18}$$

$$= x_1\int_0^1 \phi_1'(t)\phi_2'(t)dt + x_2\int_0^1 \phi_2'(t)\phi_2'(t)dt + x_3\int_0^1 \phi_3'(t)\phi_2'(t)dt. \tag{19}$$

Integralen i högerledet av ekv. 19 löser vi med *kvadratur*, till exempel trapetsregeln:

$$I(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \tag{20}$$

Där f i vårt fall motsvaras av $\phi_i'\phi_2'$. Kom ihåg att våra häxhattar är väldigt lätta att derivera! (Även om det är klurig gränsfallsräkning.) Dvs, vi har tex några givna,

$$\phi_1'(0) = -2 \quad \phi_1'(1) = 0 \tag{21}$$

$$\phi_2'(0) = 2 \quad \phi_2'(1) = -2 \tag{22}$$

$$\phi_3'(0) = 0 \quad \phi_3'(1) = 2. \tag{23}$$

Det hade sannolikt varit "snyggare" ur ett strikt numeriskt perspektiv att även approximera derivatorna med någon form, men det funkar även så här (vilket är matematiskt något slappt). Detta ger oss det ganska långa (men nu väldigt enkla):

$$x_1\frac{1}{2}(-4+0) + x_2\frac{1}{2}(4+4) + x_3\frac{1}{2}(0-4) = \tag{24}$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3. \tag{25}$$

Nu behöver vi bara lösa andra delen av vänsterledet i ekv. 16, vilket inte borde vara så svårt. Givetvis gör vi detta på samma sätt med kvadratur. Eftersom det är ϕ_2 får vi vara lite försiktiga med att använda hela intervallet $0 \leq t \leq 1$, eftersom den är noll i ändpunkterna. Vi delar upp i två intervall och använder trapetsregelen igen, där $f(t) = t\phi_2(t)$:

$$-6\int_0^1 t\phi_2(t)dt \tag{26}$$

$$\approx -6\left(\frac{0.5-0}{2}\left[f(0) + f(0.5)\right] + \frac{1-0.5}{2}\left[f(0.5) + f(1)\right]\right) \tag{27}$$

$$= -6\left(\frac{0.5}{2}0.5 + \frac{0.5}{2}0.5\right) = -\frac{3}{2}. \tag{28}$$

Denna något sifferrika framställning leder oss till att när vi sätter in våra kända x_1 och x_3 måste vi lösa den högst triviala ekvationen:

$$4x_2 - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tag{29}$$

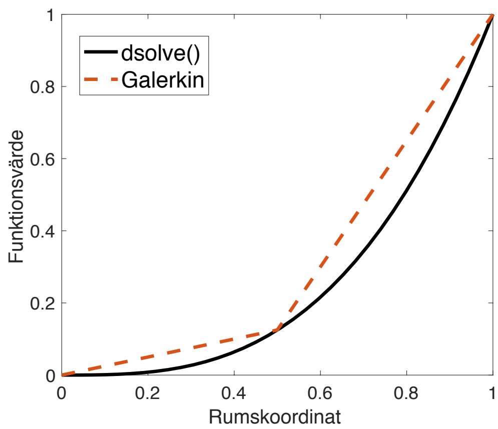
$$x_2 = -\frac{3}{8} + \frac{4}{8} \Rightarrow \tag{30}$$

$$x_2 = \frac{1}{8}. \tag{31}$$

Våran approximativa lösning till randvärdesproblemet i ekv. 5 med Galerkinmetoden fås slutligen till följande:

$$y(t) \approx u(t) = \frac{1}{8}\phi_2(t) + \phi_3(t) \tag{32}$$

Hur nära sanningen är vi med detta då? Den inbyggda lösaren *dsolve()* i MATLAB ger mig lösningen $y(t) = t^3$, plottar jag den jämte vår Galerkinlösning ser det ut som följer:



Figur 4: Lösningen till vårt randvärdesproblem, heldragen linje är från *dsolve()* och streckad är från vår Galerkinapproximation enligt ekvation 32. Observera att den streckade linjen endast innehåller information i punkterna $x = 0$, $x = 0.5$ och $x = 1$, däremellan är det en rät linje som inte har något med den verkliga lösningen (eller den approximativa) att göra.

I detta fall blir lösningen alltså exakt i punkten x_2.

Referenser

[1] M. T. Heath. *Scientific computing: an introductory survey*. Series in Computer Science. McGraw-Hill, 1997.